# Ouverts, Fermés ...

→ Bornitude ⇒ $\Updownarrow$ $\{d(x,y), (x,y) \in A^2\}$ bornée
∃ boule ouverte contenant A
$\forall a \in X\ \exists r > 0\ A \subset B(a,r)$

$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y),\ x,y \in A\}$

→ $(O_i)_{i\in I}$ ouverts ⇒ $\bigcup_{i\in I} O_i$ ouverts

I fini ⇒ $\bigcap_{i\in I} O_i$ ouverts

La prop s'inverse pour les fermés.

→ Une topologie de X est une famille $\Omega$ de parties vérifiant
- $(O_i)_{i\in I} \subset \Omega \Rightarrow \bigcup_{i\in I} O_i \in \Omega$
- $\emptyset$ et $X \in \Omega$
- $(O_i)_{i\in I}$ finie dans $\Omega \Rightarrow \bigcap_{i\in I} O_i \in \Omega$

→ A fermé ds X ⇒ $X \setminus A$ ouvert ds X

→ $A \subset X$, $\forall a \in A : B_A(a,r) = B(a,r) \cap A$, $d_A = d|_A$

$O \subset A$ → ↳ O ouvert pour $d_A$ ⇔ ∃ ouvert de X, $\Omega$ tq $O = A \cap \Omega$
↳ même chose pour fermés

→ $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ B(x,\varepsilon) \subset A$ (ie $A \in \mathcal{V}(x)$)
↳ $\mathring{A}$ est ouvert, c'est le plus grand dans A

→ $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ $(X \setminus \bar{A} = \overset{\circ}{\overline{X \setminus A}})$
↳ $\bar{A}$ est fermé, c'est ______ petit dans X contenant A

TTU → $b \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}\ (a_n) \to b$

TTU $\Rightarrow$ A fermé $\Leftrightarrow$ ($\forall b \in A$ il y a une suite de A convergeant vers b $\Leftrightarrow b \in A$)

$\rightarrow$ A dense dans B $\Leftrightarrow \bar{A} \supset B$, partout dense dans X : $\bar{A} = X$

↳ la densité est transitive : $B \subset \bar{A}$ et $C \subset \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \supset C$

$\rightarrow$ Sg de $\mathbb{R}$ : dense ou de la forme $a\mathbb{Z}$.

$\rightarrow$ $A \subset X$ : $\partial A = \bar{A} \cap (\overline{X \setminus A}) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ : c'est la frontière.

↳ A ouvert $\Rightarrow \partial \mathring{A} = \emptyset$

$\rightarrow$ $a \in A^{ac} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ (B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$

$a \in A^{i} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$

↳ $A^{ac} \cup A^{i} = \bar{A} \Rightarrow$

↳ Reformulation BW.

déf $\Rightarrow$ X espace séparable $\Leftrightarrow \exists A \subset X$ dense et dénombrable

↳ $\Leftrightarrow \exists I$ dénombrable, $(\Omega_i)_{i \in I}$ ouverts

$\forall O \subset X$ ouvert $\exists J \subset I : O = \bigcup_{i \in J} \Omega_i$